Rattrapage - Correction de la partie probabilités

Arthur Maritch-Roy

1 Exercice 4

1. Puisque X_n a même parité que n, on déduit que X_n ne peut valoir zéro que si n est pair. C'est pourquoi pour tout $m \in \mathbb{N}, \mathbf{1}_{X_{2m+1}=0} = 0$, et donc que $N = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{1}_{X_{2m}=0}$.
2. On utilise la définition de l'espérance :

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = \int_\Omega \mathbf{1}_A(\omega)\, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{P}(A).$$

   Remarque : on a vu dans le TD qu'une telle indicatrice avait pour loi la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$, le résultat en découle.
3. Deux solutions ici, soit on utilise le théorème de Fubini-Tonelli (pour les fonctions positives), soit on utilise le théorème de convergence monotone. Dans les deux cas on obtient :

$$\mathbb{E}(N) = \mathbb{E}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{1}_{X_{2m}=0}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{X_{2m}=0}) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_{2m} = 0).$$

4. C'est le même raisonnement que le partiel, revenir en zéro au bout de $2m$ pas correspond à la probabilité pour une loi binomiale de paramètres $(2m, 1/2)$ de valoir m.
5. C'est le même calcul que dans le partiel, revoir la correction du partiel.
6. En utilisant la question précédente, par comparaison des séries à termes positifs, on obtient que la série $\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_{2m} = 0)$ diverge, et donc par la question 3 que $\mathbb{E}(N) = +\infty$.

2 Exercice 5

1. Soit $k \in \mathbb{N}$, et $X \sim \mathcal{G}(p)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > k) = \sum_{m=k+1}^{\infty} \mathbb{P}(X = m) &= p \sum_{m=k+1}^{\infty} (1-p)^{m-1} \\ &= p(1-p)^k \sum_{l=0}^{\infty} (1-p)^l \\ &= (1-p)^k \frac{p}{1-(1-p)} = (1-p)^k.\end{aligned}$$

2. C'est un résultat du cours : $\forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(\mathcal{E}(\alpha) \leq t) = (1 - \mathrm{e}^{-\alpha t})\, \mathbf{1}_{t>0}$.
3. Soit $n > \lambda$: $\mathbb{P}(Y_n > u) = \mathbb{P}(X_n > nu) = \mathbb{P}(X_n > \lfloor nu \rfloor) = (1 - \frac{\lambda}{n})^{\lfloor nu \rfloor}$. De l'encadrement $nu - 1 \leq \lfloor nu \rfloor \leq nu$ on déduit alors le résultat.
4. Soit $u > 0$. D'une part,

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{nu} = \left(\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n\right)^u \xrightarrow[n\to\infty]{} (\mathrm{e}^{-\lambda})^u = \mathrm{e}^{-\lambda u}$$

et d'autre part :

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{nu-1} = \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{nu}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right),$$

ce terme tend donc aussi vers $\mathrm{e}^{-\lambda u}$. En utilisant le théorème des gendarmes, on obtient le résultat.

5. Pour $u \leq 0$, il est direct de montrer que $\mathbb{P}(Y_n > u)$ tend vers $\mathbb{P}(\mathcal{E}(\lambda) > u)$ (les deux quantités valent 1). Pour le cas $u > 0$, c'est ce que l'on a montré dans la question précédente. On a donc, pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(Y_n \leq u) = 1 - \mathbb{P}(Y_n > u) \xrightarrow[n\to\infty]{} \left(1-\mathrm{e}^{-\lambda u}\right)\mathbf{1}_{u>0},$$

on reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ. Ainsi, puisque la convergence simple des fonctions de répartition entraîne la convergence en loi, on a le résultat voulu.